Ogólna teoria miary
Lista 3

Zad 1. Wyznaczyć pierścień, σ-pierścień, algebrę oraz σ-algebrę podzbiorów $X = \mathbb{N}$ generowaną przez

$R_1 = \{A \subset \mathbb{N} : |A| = 1\}$, $\quad R_2 = \{A \subset \mathbb{N} : |A| = 2\}$, $\quad R_3 = \{\{2n : n \in \mathbb{N}\}, \{3n : n \in \mathbb{N}\}\}$

Zad 2. Wykazać, że każda skończona σ-algebra jest generowana przez zbiór swoich atomów.

Zad 3. Podać przykład -algebry, która nie jest genereowana przez zbiór swoich atomów.

Zad 4. Czy istnieje σ-algebra składająca się z n elementów, przy $n = 1, 2, 3, 4, 5$?

Zad 5. Czy istnieje nieskończona σ-algebra przeliczalna?

Zad 6. Udowodnić, że dowolny element pierścienia generowanego przez rodzinę S można pokryć skończoną sumą elementów z S.

Zad 7. Pokazać, że dla dowolnego elementu A σ-pierścienia generowanego przez rodzinę S istnieje przeliczalna podrodzina $T \subset S$ taka, że A jest elementem σ-pierścienia generowanego przez T.

Zad 8. Pokazać, że pierścień generowany przez rodzinę przeliczalną jest przeliczalny.

Zad 9. Niech S będzie dowolną rodziną podzbiorów X. Połóżmy $S_0 = S \cup \{\emptyset, X\}$ i indukcyjnie, dla każdej liczby porządkowej $\alpha > 0$, zdefiniujmy

$$S_\alpha = \left(\bigcup_{\beta<\alpha} S_\beta \right)^*,$$

gdzie C^* oznacza rodzinę składającą się z przeliczalnych sum różnic dwu zbiorów z C. Wykazać, że jeśli ω_1 jest pierwszą nieprzeliczalną liczbą porządkową, to σ-algebra $\sigma(S)$ generowana przez S wyraża się wzorem

$$\sigma(S) = \bigcup_{\alpha<\omega_1} S_\alpha.$$

Zad 10. Pokazać, że jeżeli moc rodziny S jest niewiększa niż continuum, to również moc σ-algebry $\sigma(S)$ jest niewiększa niż continuum.

Zad 11. Udowodnić, że σ-algebra zbiorów borelowskich przestrzeni topologicznej pokrywa się z σ-algebrą generowaną przez zbiory domknięte.

Zad 12. Pokazać, że na prostej euklidesowej $\mathbb{R}$ następujące zbiory są borelowskie

$$(a, b), \quad [a, b), \quad (a, b], \quad [a, b], \quad \mathbb{Q}, \quad \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

Zad 13. Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele podzbiorów przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$ niebędących zbiorami borelowskimi.

Zad 14. Niech $\{f_n\}_{n\in N}$ będzie ciągiem ciągłych funkcji rzeczywistych na $\mathbb{R}$. Wykazać, że następujące zbiory są borelowskie oraz określić ich typ:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = +\infty\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} : \text{ granica } \lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ istnieje}\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} : \text{ ciąg } \{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ dąży do liczby wymiernej}\}$$